# УСРЕДНЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С КОЭФФИЦИЕНТОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ НОРМЫ РЕШЕНИЯ

© Н.Р. Сиденко

Киев, Украина

Резюме. С использованием результата С.И.Похожаева о разрешимости начально-краевой задачи для уравнений данного типа доказана возможность усреднения задачи Неймана в периодически перфорированной области.

В работе [1] доказана однозначная разрешимость начально-краевых задач вида

$$u''(x,t) - k\left(\|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\triangle u(x,t) = f(x,t),$$
$$(x,t)\in Q = \Omega\times(0,T), \tag{1}$$
$$u(\cdot,t)|_{\partial\Omega} = 0, u(x,0) = \varphi(x), \quad u'(x,0) = \psi(x),$$

где $\Omega$ - ограниченная область в $R^n (n \geq 2)$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $T = const > 0$ (произвольная), $u' \equiv u_t \equiv \partial u/\partial t$, $u'' \equiv u_{tt} \equiv \partial^2 u/\partial t^2$, $\nabla u = (\partial_1 u, ..., \partial_n u)$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$, $\partial_i^2 \equiv \partial^2/\partial x_i^2$, $\triangle = \sum\limits_{i=1}^n \partial_i^2$; функции $u(x,t)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ комплексные, $k(s)$ — вещественная положительная функция на $\overline{R^+} = \{s\in R : s\geq 0\}$. Из данного в [1] доказательства разрешимости подобного класса задач вытекает в частности такое утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть $\partial\Omega$ — многообразие размерности $n-1$ класса $C^3$, $k(s)\in C^1(\overline{R^+})$, $k(s)\geq k_0 = const > 0$ $\forall s\geq 0$, $\varphi\in H^3(\Omega,\partial\Omega)$, $\psi\in H^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, $f\in L^1(0,T;H^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega))$, где $H^3(\Omega,\ \partial\Omega) = \left\{v\in H^3(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = A^{\frac12}v|_{\partial\Omega} = \triangle v|_{\partial\Omega} = 0\right\}$, $H^k(\Omega)$ — комплексные гильбертовы пространства Соболева, $Av = -\triangle v$, $D(A) = H^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Тогда задача (1) имеет единственное решение $u(x,t)$ со свойствами (см.[2], гл.3, лемма 8.1)*

$$u\in L^\infty\Big(0,T;H^3(\Omega,\partial\Omega)\Big)\cap C^0\Big([0,T];H^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\Big)\subset C^0_s\Big(0,T;H^3(\Omega,\partial\Omega)\Big),$$
$$u'\in L^\infty\Big(0,T;H^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\Big)\cap C^0\Big([0,T];L^2(\Omega)\Big)$$
$$\subset C^0_s\Big(0,T;H^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\Big),\quad u''\in L^1\Big(0,T;\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\Big), \tag{2}$$

*причем справедливы оценки*

$$\|\nabla u\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}\leq k_0^{-1}K_0,\quad \|u'\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}\leq K_0,$$
$$K_0 = 2\Big[\|\psi\|^2 + I(\|\nabla\varphi\|^2) + 2\|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\Big],$$
$$I(\alpha) = \int\limits_0^\alpha k(s)ds, \alpha\in\overline{R^+}; \tag{3}$$

$$\|\nabla\triangle u(\cdot,t)\|^2+\|\triangle u'(\cdot,t)\|^2\le K_1\Big(\|\nabla\triangle\varphi\|,$$

$$\|\triangle\psi\|,\|\triangle f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))},k_0^{-1},K_0,\|k(s)\|_{C^0([0,k_0^{-1}K_0])},T\Big)\quad\forall t\in[0.T],\tag{4}$$

*где $\|\cdot\|$ — норма в $L^2(\Omega)$, $K_1(\dots)$ является непрерывной возрастающей функцией своих положительных аргументов.*

В настоящей работе рассматривается периодически перфорированная область $\Omega^\varepsilon\subset\Omega$ типа II, определение которой следующее [3]: $\Omega^\varepsilon=(\Omega\backslash\overset{\circ}{\Omega}_1)\cup\Omega_1^\varepsilon$, где $\Omega_1\equiv\Omega_1(\varepsilon)=\bigcup\limits_z\{\varepsilon z+\varepsilon\bar Y: z\in Z^n,\ \ dist(\varepsilon z+\varepsilon\bar Y,\partial\Omega)\ge\varepsilon\}$, $Y=(0,1)^n$, $\varepsilon\bar Y=[0,\varepsilon]^n$, $\varepsilon>0$, $\overset{\circ}{\Omega}_1\equiv\overset{\circ}{\Omega}_1(\varepsilon)$ — множество внутренних точек $\Omega_1$, $\Omega_1^\varepsilon=\Omega_1\backslash\Theta^\varepsilon$, $\Theta^\varepsilon=\{\varepsilon z+\varepsilon\Theta: z\in Z^n\}$, $\Theta$ — замкнутая область в $Y$ с границей $\partial\Theta$. В такой области рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{gathered}u_{tt}^\varepsilon(x,t)-k\Big(N_\varepsilon^2(t)\Big)\triangle u^\varepsilon(x,t)=f^\varepsilon(x,t),\quad (x,t)\in Q^\varepsilon=\Omega^\varepsilon\times(0,T),\\ u^\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\Omega}=0,\quad \frac{\partial u^\varepsilon(\cdot,t)}{\partial n}\bigg|_{\partial\Theta^\varepsilon\cap\Omega_1}=0,\\ u^\varepsilon(x,0)=u_0^\varepsilon(x),\quad u_t^\varepsilon(x,0)=u_1^\varepsilon(x),\end{gathered}\tag{5}$$

где $N_\varepsilon(t)=\|\triangle u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали. и изучается возможность ее усреднения при $\varepsilon\to0$.

В предположении, что $\partial\Omega$, $\partial\Theta\in C^3$, введем определения и обозначения гильбертовых комплексных пространств:

$$H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)=\Big\{v\in H^1(\Omega^\varepsilon): v|_{\partial\Omega}=0\Big\},$$

$$H^2(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega^\varepsilon)=\Big\{v\in H^2(\Omega^\varepsilon): v|_{\partial\Omega}=0,\ \ \frac{\partial v}{\partial n}\bigg|_{\partial\Theta^\varepsilon\cap\Omega_1}=0\Big\},$$

$$H^3(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega^\varepsilon)=\Big\{v\in H^3(\Omega^\varepsilon): v|_{\partial\Omega}=A_1^{\frac12}v|_{\partial\Omega}=$$

$$\triangle v|_{\partial\Omega}=0,\ \ \frac{\partial v}{\partial n}\bigg|_{\partial\Theta^\varepsilon\cap\Omega_1}=\frac{\partial}{\partial n}A_1^{\frac12}v|_{\partial\Theta^\varepsilon\cap\Omega_1}=0\Big\},$$

$$A_1v=-\triangle v, D(A_1)=\left\{v\in H^2(\Omega^\varepsilon): v|_{\partial\Omega}=0,\ \ \frac{\partial v}{\partial n}\bigg|_{\partial\Theta^\varepsilon\cap\Omega_1}=0\right\}.$$

Справедливо такое предложение.

Теорема 2. *Если $\partial\Omega$ и $k(s)$ такие же, как в теореме 1, $\partial\Theta\in C^3$, $u_0^\varepsilon\in H^3(\Omega^\varepsilon,\ \partial\Omega^\varepsilon)$, $u_1^\varepsilon\in H^2(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega^\varepsilon)$, $f^\varepsilon\in L^1(0,T;H^2(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega^\varepsilon))$, то задача (5) имеет единственное решение со свойствами*

$$\begin{gathered}u^\varepsilon\in C_s^0\Big(0,T;H^3(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega^\varepsilon)\Big)\cap C^0\Big([0,T];H^2(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega^\varepsilon)\Big),\\ u_t^\varepsilon\in C_s^0\Big(0,T;H^2(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega^\varepsilon)\Big)\cap C^0\Big([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon)\Big),\\ u_{tt}^\varepsilon\in L^1\Big(0,T;H^1(\Omega^\varepsilon,\partial\Omega)\Big),\end{gathered}\tag{6}$$

*причем справедливы оценки, аналогичные (3), (4), с очевидной заменой и на $u^\varepsilon$. $\varphi$ на $u_0^\varepsilon$, $\psi$ на $u_1^\varepsilon$, $f$ на $f^\varepsilon$, $\Omega$ на $\Omega^\varepsilon$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 методом работы [1].

Следствие. Если предположить, что

$$\|\nabla u_0^\varepsilon\| + \|\nabla\triangle u_0^\varepsilon\| + \|u_1^\varepsilon\| + \|\triangle u_1^\varepsilon\| + \|f^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))} +$$
$$\|\triangle f^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))} \le M = const \ \ \forall\varepsilon, \ \ \|v^\varepsilon\| \equiv \|v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}, \tag{7}$$

то имеют место равномерные оценки вида (3), (4):

$$\|\nabla u^\varepsilon\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} + \|u_t^\varepsilon\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} \le K_2,$$
$$\|\nabla\triangle u^\varepsilon(\cdot,t)\|^2 + \|\triangle u_t^\varepsilon(\cdot,t)\|^2 \le K_3 \ \ \forall t\in[0,T], \tag{8}$$

где $K_2, K_3$ — числа, не зависящие от $\varepsilon$, а значит — на основании интерполяции — верны равномерные оценки

$$0 < k_0 \le k\Big(N_\varepsilon^2(t)\Big) \le k_1 = \max_{0\le s\le K_2} k(s),$$
$$\|\triangle u^\varepsilon\|^2_{C^0([0,T]:L^2(\Omega^\varepsilon))} + \|\nabla u_t^\varepsilon\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} \le K_4 \ \ \forall\varepsilon. \tag{9}$$

Тот факт, что функция $f(y)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, определена и интегрируема в $Y\backslash\Theta$ (или $Y$) и периодична по каждой переменной $y_i$ с единичным периодом, обозначаем включением $f\in\Gamma(Y\backslash\Theta)$ (соответственно $f\in\Gamma(\bar Y)$). Для такой функции обозначаем

$$\langle f\rangle_{Y\backslash\Theta} = (1-|\Theta|)^{-1}\int\limits_{Y\backslash\Theta} f(y)dy, \ \ |\Theta| = meas_n\Theta = \int\limits_\Theta dy.$$

Представим временно, что

$$f^\varepsilon(x,t) = f(x,t,x/\varepsilon), \ \ f(x,t,\cdot)\in\Gamma(Y\backslash\Theta)$$

и что решение задачи (5) представляется асимптотической формулой

$$u^\varepsilon(x,t) \cong u_0(x,t,x/\varepsilon) + \varepsilon u_1(x,t,x/\varepsilon) + \varepsilon^2 u_2(x,t,x/\varepsilon) + O(\varepsilon^3),$$
$$(x,t)\in\Omega_1^\varepsilon\times(0,T), \ \ u_k(x,t,\cdot)\in\Gamma(Y\backslash\Theta). \tag{10}$$

Подставив разложение (10) (формально) в уравнение и граничное условие на $\partial\Theta^\varepsilon$ в (5) и приравняв слагаемые с одинаковыми степенями $\varepsilon$, считая $y = x/\varepsilon$ и $x$ независимыми аргументами (см., например, [3, 4]), найдем

$$u_0 \equiv u_0(x,t), \ \ u_1(x,t,y) = N_k(y)\partial_k u_0(x,t), \tag{11}$$

где $N_k, k=\overline{1,n}$, является единственным решением задачи

$$\triangle N_k(y) = 0, \ \ y\in Y\backslash\Theta, \ \ N_k\in\Gamma(Y\backslash\Theta),$$
$$\left[\frac{\partial N_k(y)}{\partial n} + \cos(n_y, y_k)\right]_{\partial\Theta} = 0, \ \ \langle N_k\rangle_{Y\backslash\Theta} = 0; \tag{12}$$

далее формально устанавливаем, что

$$N_\varepsilon^2(t) = N^2(t) + q(\varepsilon), \ \ k\Big(N_\varepsilon^2(t)\Big) = k\Big(N^2(t)\Big) + q_1(\varepsilon),$$
$$\lim_{\varepsilon\to0} q(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to0} q_1(\varepsilon) = 0,$$
$$N^2(t) = \int\limits_\Omega\int\limits_{Y\backslash\Theta}\Big|\nabla u_0(x,t) + \nabla_y u_1(x,t,y)\Big|^2 dydx =$$
$$\Big(1-|\Theta|\Big)\Big(\|\nabla u_0(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \alpha_{ij}\int\limits_\Omega \partial_i u_0(x,t)\partial_j\bar u_0(x,t)dx\Big) \le$$
$$(1-|\Theta|)(1-\alpha)\|\nabla u_0(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{13}$$

здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до $n$. $\bar{u}_0$ — комплексно сопряженная функция для $u_0$,

$$\alpha = \min_{\xi:|\xi|=1} \left\langle \left| \nabla\Big(\xi_i N_i(\cdot)\Big) \right|^2 \right\rangle_{Y\setminus\Theta} \in (0,1),$$

$$\alpha_{ij} = \langle \nabla N_i \cdot \nabla N_j \rangle_{Y\setminus\Theta} = (1-|\Theta|)^{-1} \int\limits_{\partial\Theta} N_j(y)\cos(n_y, y_i)d\sigma_y =$$

$$-\left\langle \frac{\partial N_j}{\partial y_i} \right\rangle_{Y\setminus\Theta}; \tag{14}$$

необходимое условие для определения $u_2(x,t,y)$ — уравнение относительно $u_0(x,t)$ следующее:

$$u_0''(x,y) - k\Big(N^2(t)\Big)\Big(\triangle u_0(x,t) - \alpha_{ij}\partial_i\partial_j u_0(x,t)\Big) =$$

$$\Big\langle f(x,t,\cdot)\Big\rangle_{Y\setminus\Theta}, \quad (x,t) \in Q, \tag{15}$$

в котором $\delta_i^j - \alpha_{ij} = \left\langle \nabla\Big(y_i + N_i(y)\Big)\cdot\nabla\Big(y_j+N_j(y)\Big)\right\rangle_{Y\setminus\Theta}$, так что матрица $\{\delta_i^j - \alpha_{ij}, \ i,j = \overline{1,n}\}$ вещественная, эллиптическая, симметрическая; с учетом (15) находим

$$u_2(x,t,y) = N_{ij}(y)\partial_i\partial_j u_0(x,t) + \tilde{u}_2(x,t,y),$$

где $N_{ij}, \ \ i,j = \overline{1,n}$, — единственное решение задачи

$$-\triangle N_{ij}(y) = 2\frac{\partial N_j(y)}{\partial y_i} + \alpha_{ij}, \quad y \in Y\setminus\Theta, \quad N_{ij} \in \Gamma(Y\setminus\Theta),$$

$$\left[\frac{\partial N_{ij}(y)}{\partial n} + N_j(y)\cos(n_y, y_i)\right]_{\partial\Theta} = 0, \quad \langle N_{ij}\rangle_{Y\setminus\Theta} = 0, \tag{16}$$

а $y \to \tilde{u}_2(x,t,y)$ — единственное решение следующей задачи:

$$-\triangle_y \tilde{u}_2(x,t,y) = \frac{1}{k(N^2(t))}\Big[f(x,t,y) - \langle f(x,t,\cdot)\rangle_{Y\setminus\Theta}\Big], \quad y \in Y\setminus\Theta,$$

$$\tilde{u}_2(x,t,\cdot) \in \Gamma(Y\setminus\Theta), \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial n_y}\Big|_{\partial\Theta} = 0, \quad \Big\langle \tilde{u}_2(x,t,\cdot)\Big\rangle_{Y\setminus\Theta} = 0.$$

Имея в виду (10)–(16) и обозначая $\widehat{\nabla N_k}(y)$ доопределенную нулем на $\Theta$ вектор-функцию $\nabla N_k(y) \in \Gamma(Y\setminus\Theta)$, $(\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon(x) = \widehat{\nabla N_k}(\frac{x}{\varepsilon})$, а $\widehat{v^\varepsilon}(x)$ — доопределенную нулем на $\Theta^\varepsilon \cap \Omega_1(\varepsilon)$ функцию $v^\varepsilon(x)$, заданную в $\Omega^\varepsilon$, докажем следующее основное утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, условия (7) и следующие:*

$$f(x,t) \in L^1\Big(0,T; H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\Big), \quad u_1(x) \in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\|f^\varepsilon - f\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))} + \|u_1^\varepsilon - u_1\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} + \|\nabla u_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\Big) = 0. \tag{17}$$

*Тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$\|N_\varepsilon^2 - N^2\|_{C^0([0,T])} \longrightarrow 0,$$

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} + \|u_t^\varepsilon - u_0'\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} \longrightarrow 0,$$

$$\|\nabla u^\varepsilon - \nabla u_0 - (\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon \partial_k u_0\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} \longrightarrow 0, \tag{18}$$

$$\widehat{\partial_i u^\varepsilon}(\cdot,t) \longrightarrow (1-|\Theta|)(\partial_i - \alpha_{ij}\partial_j)u_0(\cdot,t), \quad i = \overline{1,n},$$

*слабо в* $L^2(\Omega)$ *равномерно относительно* $t \in [0,T]$, *т.е. сильно в* $C^0_s\Big(0,T;L^2(\Omega)\Big)$. *где функция* $u_0(x,t)$, *для которой справедливы включения (2), является единственным решением задачи*

$$u_0''(x,t) - k\Big(N^2(t)\Big)\Big(\triangle - \alpha_{ij}\partial_i\partial_j\Big)u_0(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$u_0(\cdot,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_0(x,0) = 0, \quad u_0'(x,0) = u_1(x). \tag{19}$$

**Доказательство.** Прежде всего заметим, что задача (19) совершенно аналогична задаче (1) и приводится к последней линейным ортогональным преобразованием с постоянными коэффициентами переменных $x$. Поэтому для (19) справедлива теорема 1 с очевидной заменой $u$ на $u_0$, $k(s)$ на $k((1-|\Theta|)s)$, $\varphi$ на 0, $\psi$ на $u_1$.

Определим для $\Omega_1(\varepsilon)$, как в [3], срезающую функцию

$$\varphi^\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega\backslash\Omega_1(\varepsilon), \\ 1, & x \in \Omega_1(\varepsilon) : dist(x, \partial\Omega_1(\varepsilon)) \geq c\varepsilon, \end{cases}$$

где $c > 0$ не зависит от $\varepsilon$, причем $0 \leq \varphi^\varepsilon(x) \leq 1$, $\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon(x)| \leq c_1 \forall\varepsilon$, $c_1 = const$. Рассмотрим, как в [3] (гл. II, ¡ 2:2.2-2.4), усредненное решение с поправкой первого порядка

$$\tilde{u}^\varepsilon(x,t) = u_0(x,t) + \varepsilon\varphi^\varepsilon(x)N_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_k u_0(x,t). \tag{20}$$

Обозначая

$$Au_0 = (\triangle - \alpha_{ij}\partial_i\partial_j)u_0, \quad V^\varepsilon(x) = V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

$$(\nabla V)^\varepsilon(x) = (\nabla_y V)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad \forall V(y) \in \Gamma(Y\backslash\Theta),$$

для разности $u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon$ с использованием уравнений (12), (16), (19) запишем равенства в области $Q^\varepsilon$

$$(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon)'' - k(N_\varepsilon^2)\triangle(u^\varepsilon - \tilde{u}^\varepsilon) = f^\varepsilon - u_0'' - \varepsilon\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon\partial_k u_0'' + k(N_\varepsilon^2)\Big[Au_0 +$$

$$(1-\varphi^\varepsilon)\alpha_{ij}\partial_i\partial_j u_0 + \varepsilon\triangle\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon\partial_k u_0 + \varepsilon^{-1}\varphi^\varepsilon(\triangle N_k)^\varepsilon\partial_k u_0 + \varepsilon\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon\partial_k\triangle u_0 +$$

$$2\nabla\varphi^\varepsilon\cdot(\nabla N_k)^\varepsilon\partial_k u_0 + 2\varepsilon N_k^\varepsilon\nabla\varphi^\varepsilon\cdot\nabla\partial_k u_0 + 2\varphi^\varepsilon(\nabla N_j)^\varepsilon\cdot\nabla\partial_j u_0 + \varphi^\varepsilon\alpha_{ij}\partial_i\partial_j u_0\Big] -$$

$$f + u_0'' - k(N^2)Au_0 = f^\varepsilon - f - \varepsilon\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon\partial_k\left[u_0'' - k(N_\varepsilon^2)\triangle u_0\right] +$$

$$k(N_\varepsilon^2)(1-\varphi^\varepsilon)\alpha_{ij}\partial_i\partial_j u_0 + \Big[k(N_\varepsilon^2) - k(N^2)\Big]Au_0 + k(N_\varepsilon^2)\Big[\varepsilon\triangle\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon\partial_k u_0 +$$

$$2\nabla\varphi^\varepsilon\cdot(\nabla N_k)^\varepsilon\partial_k u_0 + 2\varepsilon N_k^\varepsilon\nabla\varphi^\varepsilon\cdot\nabla\partial_k u_0 - \varphi^\varepsilon(\triangle N_{ij})^\varepsilon\partial_i\partial_j u_0\Big] =$$

$$f^\varepsilon - f - \varepsilon\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon\partial_k\Big[f + k(N^2)Au_0 - k(N_\varepsilon^2)\triangle u_0\Big] +$$

$$k(N_\varepsilon^2)\Big\{\varepsilon\varphi^\varepsilon(\partial_{y_k}N_{ij})^\varepsilon\partial_k\partial_i\partial_j u_0 + \varepsilon\nabla\varphi^\varepsilon\cdot\Big[(\nabla N_{ij})^\varepsilon\partial_i\partial_j u_0 + N_k^\varepsilon\nabla\partial_k u_0\Big] +$$

$$(1-\varphi^\varepsilon)\Big[(\partial_{y_j}N_i)^\varepsilon + \alpha_{ij}\Big]\partial_i\partial_j u_0\Big\} - k(N_\varepsilon^2)div\Big[\varepsilon\varphi^\varepsilon(\nabla N_{ij})^\varepsilon\partial_i\partial_j u_0 -$$

$$\varepsilon\nabla\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon\partial_k u_0 + (1-\varphi^\varepsilon)(\nabla N_k)^\varepsilon\partial_k u_0\Big] + \Big[k(N_\varepsilon^2) - k(N^2)\Big]Au_0 \equiv$$

$$F^\varepsilon - k(N_\varepsilon^2)div\vec{F}^\varepsilon + \Big[k(N_\varepsilon^2) - k(N^2)\Big]Au_0. \tag{21}$$

При этом для (21) существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\|F^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))}+\|\vec{F}^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))}+\|\vec{F}^\varepsilon_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))}\right)=0 \qquad (22)$$

в силу условия (17) для $f^\varepsilon - f$, включений (2) для $u_0(x,t)$, гладкости $\partial\Theta$ — так что решения задач (12) и (16) $N_k(y),\ \ N_{ij}(y)\in C^{2+\alpha}(\overline{Y\setminus\Theta})\ \ \forall\alpha\in(0,1)$ — а также свойств $\varphi^\varepsilon(x)$.

Учитывая граничные условия на $\partial\Theta$ в (12) и (16), запишем граничное условие Неймана для $u^\varepsilon-\tilde{u}^\varepsilon$ на $\partial\Theta^\varepsilon\cap\mathring{\Omega}_1$

$$\frac{\partial}{\partial n_x}(u^\varepsilon-\tilde{u}^\varepsilon)=-\partial_k u_0\cos(n_y,y_k)\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}-\varepsilon\frac{\partial\varphi^\varepsilon}{\partial n_x}N_k^\varepsilon\partial_k u_0-$$

$$\varepsilon\varphi^\varepsilon N_j^\varepsilon\cos(n_y,y_i)\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}\partial_i\partial_j u_0-\varphi^\varepsilon\left(\frac{\partial N_k}{\partial n_y}\right)^\varepsilon\partial_k u_0=$$

$$-\varepsilon\frac{\partial\varphi^\varepsilon}{\partial n_x}N_k^\varepsilon\partial_k u_0+\varepsilon\varphi^\varepsilon\left(\frac{\partial N_{ij}}{\partial n_y}\right)^\varepsilon\partial_i\partial_j u_0+$$

$$(1-\varphi^\varepsilon)\left(\frac{\partial N_k}{\partial n_y}\right)^\varepsilon\partial_k u_0,\quad x\in\partial\Theta^\varepsilon\cap\mathring{\Omega}_1,\quad t\in(0,T). \qquad (23)$$

Отметим, что это условие согласовано с дивергентными слагаемыми в равенстве (21). Граничное условие Дирихле на $\partial\Omega$ однородное:

$$u^\varepsilon-\tilde{u}^\varepsilon=0,\quad x\in\partial\Omega,\quad t\in(0,T), \qquad (24)$$

а начальные условия имеют вид

$$(u^\varepsilon-\tilde{u}^\varepsilon)_{t=0}=u_0^\varepsilon(x), \qquad (25)$$

$$(u^\varepsilon-\tilde{u}^\varepsilon)_t|_{t=0}=u_1^\varepsilon(x)-u_1(x)-\varepsilon\varphi^\varepsilon(x)N_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_k u_1(x)\equiv\varphi_1^\varepsilon(x),\quad x\in\Omega^\varepsilon,$$

где ввиду (17)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\varphi_1^\varepsilon\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}=0. \qquad (26)$$

На основании (21), (23), (24), (25) заключаем, что функция $\omega^\varepsilon=u^\varepsilon-\tilde{u}^\varepsilon$ является решением следующей краевой задачи:

$$\omega^\varepsilon_{tt}-k(N_\varepsilon^2)\triangle\omega^\varepsilon=F^\varepsilon-k(N_\varepsilon^2)div\vec{F}^\varepsilon+\Big[k(N_\varepsilon^2)-k(N^2)\Big]Au_0,\quad (x,t)\in Q^\varepsilon,$$

$$\frac{\partial\omega^\varepsilon}{\partial n_x}=\vec{F}^\varepsilon\cdot\vec{n}_x,\quad x\in\partial\Theta^\varepsilon\cap\mathring{\Omega}_1,\quad t\in(0,T),\quad \omega^\varepsilon\Big|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0, \qquad (27)$$

$$\omega^\varepsilon\Big|_{t-0}=u_0^\varepsilon(x),\quad \omega_t^\varepsilon\Big|_{t=0}=\varphi_1^\varepsilon(x),x\in\Omega^\varepsilon$$

при условиях (17) для $u_0^\varepsilon$, (22),(26).

Оценим теперь с учетом включений (2) для $u_0(x,t)$ и оценок (8) разности квадратов норм, обозначая $\|\cdot\|$ норму в $L^2(\Omega^\varepsilon)$:

$$\Big|N_\varepsilon^2(t)-\|\nabla\tilde{u}^\varepsilon(\cdot,t)\|^2\Big|=\Big(N_\varepsilon(t)+\|\nabla\tilde{u}^\varepsilon(\cdot,t)\|\Big)\Big|N_\varepsilon(t)-\|\nabla\tilde{u}^\varepsilon(\cdot,t)\|\Big|\leq$$

$$\Big(K_2^{\frac{1}{2}}+c_2\|\nabla u_0\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}+c_3\|\triangle u_0\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}\Big)\|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,t)\|$$

$$\leq c_4\|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,t)\|,\quad c_4=const, \qquad (28)$$

$$\|\nabla\tilde{u}^\varepsilon(\cdot,t)\|=\Big\|\nabla u_0+(\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon\partial_k u_0+\varepsilon\nabla\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon\partial_k u_0-(1-\varphi^\varepsilon)(\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon\partial_k u_0+$$

$$\varepsilon\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon\nabla\partial_k u_0\Big\|=\Big\|\nabla u_0+(\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon\partial_k u_0\Big\|+\omega_1^\varepsilon(t),$$

$$\|\omega_1^\varepsilon\|_{C^0([0,T])} \le c_5\Big[\varepsilon\|\triangle u_0\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} + \big\|\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|\nabla u_0\big\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} +$$
$$\big\|(1-\varphi^\varepsilon)\nabla u_0\big\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}\Big] \overset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} 0.$$

Следовательно, имеем

$$\Big\|\nabla\tilde u^\varepsilon(\cdot,t)\Big\|^2 = \Big\|\nabla u_0(\cdot,t) + (\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon\partial_k u_0(\cdot,t)\Big\|^2 + \omega_2^\varepsilon(t) \equiv J^\varepsilon(t) + \omega_2^\varepsilon(t).$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\omega_2^\varepsilon\|_{C^0([0,T])} = 0, \tag{29}$$
$$J^\varepsilon(t) = \int\limits_\Omega \Big[|\nabla u_0(x,t)|^2\chi^\varepsilon(x) + (\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon(x)\cdot 2Re(\partial_k u_0\nabla\bar u_0) +$$
$$(\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon\cdot(\widehat{\nabla N_l})^\varepsilon\partial_k u_0\partial_l\bar u_0\Big]dx,$$

здесь $\chi^\varepsilon(x)$ — характеристическая функция множества $\Omega\backslash(\Theta^\varepsilon\cap\Omega_1)$. Оценка $J^\varepsilon(t)$ основана на таком утверждении.

Лемма. *Для функций $f(t,x)\in C^0([0,T];L^1(\Omega))$ и $g(y)\in\Gamma(\bar Y)\cap L^\infty(Y)$, у которой $g|_\Theta = 0$, имеют место сходимости при $\varepsilon\to 0$*

$$\int\limits_\Omega g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)f(t,x)dx \to \int\limits_{Y\backslash\Theta} g(y)dy\int\limits_\Omega f(t,x)dx,$$
$$\int\limits_\Omega \chi^\varepsilon(x)f(t,x)dx \to \Big(1-|\Theta|\Big)\int\limits_\Omega f(t,x)dx,$$

*равномерные относительно $t\in[0,T]$.*

**Доказательство.** Для произвольного $\delta>0$ приблизим $f(t,x)$ функцией $\tilde f(t,x)\in C^0(\bar Q)$ так, чтобы $\|\tilde f - f\|_{C^0([0,T];L^1(\Omega))}\le\delta\backslash M_1$, $M_1{=}6\|g\|_{L^\infty(Y)}>0$. Для такой $\tilde f$, обозначая $\Omega_1(Z^n)=\Big\{z\in Z^n : \varepsilon(z+\bar Y)\subset\Omega_1\Big\}$, $\omega(\tilde f,h)$ — модуль непрерывности $\tilde f$ на $\bar Q$, имеем

$$\int\limits_{\Omega_1} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\tilde f(t,x)dx = \sum_{z\in\Omega_1(Z^n)}\varepsilon^n\int\limits_{Y\backslash\Theta} g(y)\tilde f(t,\varepsilon z+\varepsilon y)dy =$$
$$\sum_{z\in\Omega_1(Z^n)}\varepsilon^n\int\limits_{Y\backslash\Theta} g(y)\left[\tilde f(t,\varepsilon z+\varepsilon y)-\tilde f(t,\varepsilon z)\right]dy+$$
$$\int\limits_{Y\backslash\Theta} g(y)dy\sum_{z\in\Omega_1(Z^n)}\int\limits_{\varepsilon(z+Y)}\left[\tilde f(t,\varepsilon z)-\tilde f(t,x)\right]dx + \int\limits_{Y\backslash\Theta} g(y)dy\int\limits_{\Omega_1}\tilde f(t,x)dx,$$
$$J_1^\varepsilon(t) = \left|\int\limits_\Omega g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)f(t,x)dx - \int\limits_{Y\backslash\Theta} g(y)dy\int\limits_\Omega f(t,x)dx\right| \le$$
$$\int\limits_\Omega \left|g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right|\ \left|f-\tilde f\right|dx + \int\limits_{Y\backslash\Theta}|g(y)|dy\int\limits_\Omega|\tilde f - f|dx +$$
$$\int\limits_{\Omega\backslash\Omega_1}\left|g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\tilde f\right|dx + \int\limits_{Y\backslash\Theta}|g(y)|dy\int\limits_{\Omega\backslash\Omega_1}|\tilde f|dx +$$
$$\left|\int\limits_{\Omega_1} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\tilde f(t,x)dx - \int\limits_{Y\backslash\Theta} g(y)dy\int\limits_{\Omega_1}\tilde f(t,x)dx\right| \le$$

$$\|g\|_{L^\infty(Y)}\Big\{\Big(2-|\Theta|\Big)\Big\|\tilde f-f\Big\|_{C^0([0,T];L^1(\Omega))}+\Big(2-|\Theta|\Big)\Big\|\tilde f\Big\|_{C^0(\bar Q)}\Big|\Omega\backslash\Omega_1(\varepsilon)\Big|+$$

$$2\Big(1-|\Theta|\Big)\Big|\Omega\Big|\omega(\tilde f,\varepsilon\sqrt{n})\Big\}.$$

Существует $\varepsilon(\delta)>0$ такое, что $\|\tilde f\|_{C^0(\bar Q)}|\Omega\backslash\Omega_1(\varepsilon)|\le\delta/M_1,\ \ |\Omega|\omega(\tilde f,\varepsilon\sqrt{n})\le\delta/M_1\ \ \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon(\delta)]$. Для таких $\varepsilon$ получаем $J_1^\varepsilon(t)<\delta\ \ \forall t\in[0,T]$. Учитывая, что $\chi^\varepsilon(x)=\chi_{Y\backslash\Theta}(x/\varepsilon)$ для $x\in\Omega_1$, где $\chi_{Y\backslash\Theta}(y)\in\Gamma(\bar Y)$ — характеристическая функция множества $Y\backslash\Theta$, аналогично убеждаемся во второй равномерной сходимости. Лемма доказана.

С учетом леммы запишем

$$J^\varepsilon(t)=(1-|\Theta|)\int\limits_\Omega|\nabla u_0(x,t)|^2dx+\int\limits_{Y\backslash\Theta}\nabla N_k(y)dy\cdot\int\limits_\Omega 2Re(\partial_k u_0\nabla\bar u_0)dx+$$

$$\int\limits_{Y\backslash\Theta}\nabla N_k\cdot\nabla N_l dy\int\limits_\Omega\partial_k u_0\partial_l\bar u_0dx+\omega_3^\varepsilon(t)\equiv J(t)+\omega_3^\varepsilon(t).$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\|\omega_3^\varepsilon\|_{C^0([0,T])}=0. \tag{30}$$

С учетом (14) третье слагаемое в $J(t)$ имеет вид

$$(1-|\Theta|)\int\limits_\Omega\alpha_{kl}\partial_k u_0\partial_l\bar u_0dx,$$

а второе перепишем так

$$(1-|\Theta|)2Re\{\langle\partial_{y_l}N_k\rangle_{Y\backslash\Theta}\int\limits_\Omega\partial_k u_0\partial_l\bar u_0dx\}=$$

$$-(1-|\Theta|)2Re\int\limits_\Omega\alpha_{xl}\partial_k u_0\partial_l\bar u_0dx=-2(1-|\Theta|)\int\limits_\Omega\alpha_{kl}\partial_k u_0\partial_l\bar u_0dx.$$

Так что, ввиду (13) имеем $J(t)=N^2(t)$ и, следовательно,

$$\Big|\|\nabla\tilde u^\varepsilon(\cdot,t)\|^2-N^2(t)\Big|\le|\omega_2^\varepsilon(t)+\omega_3^\varepsilon(t)|\ \ \forall t\in[0,T], \tag{31}$$

причем справедливы сходимости (29), (30).

Учитывая, что $\omega_t^\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\Omega}=0$, а также граничное условие на $\partial\Theta^\varepsilon$ в (27), после умножения уравнения (27) на $\bar\omega_t^\varepsilon$ и интегрирования равенства по $\Omega^\varepsilon$ имеем

$$\frac{d}{dt}\|\omega_t^\varepsilon\|^2+k\Big(N_\varepsilon^2(t)\Big)\frac{d}{dt}\|\nabla\omega^\varepsilon\|^2=2Re(F^\varepsilon,\omega_t^\varepsilon)+2k(N_\varepsilon^2)Re(\vec F^\varepsilon,\nabla\omega_t^\varepsilon)+$$

$$2\Big\{\Big[k(N_\varepsilon^2)-k\Big(\|\nabla\tilde u^\varepsilon\|^2\Big)\Big]+\Big[k\Big(\|\nabla\tilde u^\varepsilon\|^2\Big)-k(N^2)\Big]\Big\}Re(Au_0,\omega_t^\varepsilon). \tag{32}$$

Здесь обозначено

$$\|u\|=\|u\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)},\quad (u,v)=\int\limits_{\Omega^\varepsilon}u(x)\bar v(x)dx,\quad(\vec u,\vec v)=(u_i,v_i),$$

$$\vec u=(u_i),\quad\vec v=(v_i),\quad i=\overline{1,n}.$$

На основании (8), (9) имеем также оценку

$$\Big|\frac{d}{dt}k(N_\varepsilon^2)\Big|=\Big|k'(N_\varepsilon^2)2Re(\nabla u^\varepsilon,\nabla u_t^\varepsilon)\Big|\le c_6=$$

$$2\max_{0\le s\le K_2}\Big|k'(s)\Big|(K_2K_4)^{\frac12}\ \ \forall t\in[0,T],\ \ \forall\varepsilon. \tag{33}$$

Проинтегрировав равенство (32) по $t$ с учетом начальных условий (27) и оценок (9), (28), (31), (33), приходим к неравенству

$$\Big\|\omega_t^\varepsilon(\cdot,t)\Big\|^2 + k\Big(N_\varepsilon^2(t)\Big)\Big\|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,t)\Big\|^2 = \|\varphi_1^\varepsilon\|^2 + k\Big(\|\nabla u_0^\varepsilon\|^2\Big)\Big\|\nabla u_0^\varepsilon\Big\|^2 +$$

$$\int_0^t \Big\|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,\tau)\Big\|^2 \frac{d}{d\tau}k\Big(N_\varepsilon^2(\tau)\Big)d\tau + 2Re\Bigg\{\int_0^t (F^\varepsilon,\omega_\tau^\varepsilon)d\tau +$$

$$k\Big(N_\varepsilon^2(t)\Big)\Big(\vec{F}^\varepsilon(\cdot,t),\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,t)\Big) - k\Big(\|\nabla u_0^\varepsilon\|^2\Big)\Big(\vec{F}^\varepsilon(\cdot,0),\nabla u_0^\varepsilon\Big) -$$

$$\int_0^t \Big(\frac{d}{d\tau}\Big[k(N_\varepsilon^2(\tau))\vec{F}^\varepsilon(\cdot,\tau)\Big],\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,\tau)\Big)d\tau + \int_0^t \Bigg[\Big(k(N_\varepsilon^2(\tau)) -$$

$$k\Big(\|\nabla\tilde{u}^\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2\Big)\Big) + \Big(k\Big(\|\nabla\tilde{u}^\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2\Big) - k\Big(N^2(\tau)\Big)\Big)\Bigg](Au_0,\omega_\tau^\varepsilon)d\tau\Bigg\} \le$$

$$\|\varphi_1^\varepsilon\|^2 + k_1\|\nabla u_0^\varepsilon\|^2 + c_6\int_0^t \|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2 d\tau + \nu_1 \max_{0\le\tau\le t}\|\omega_\tau^\varepsilon\|^2 +$$

$$\nu_1^{-1}\|F^\varepsilon\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))} + \nu_2\|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,t)\|^2 + \nu_2^{-1}k_1^2\|\vec{F}^\varepsilon\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} +$$

$$2k_1\|\vec{F}^\varepsilon(\cdot,0)\| \;\; \|\nabla u_0^\varepsilon\| + \nu_3 \max_{0\le\tau\le t}\|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2 +$$

$$\nu_3^{-1}\Big[c_6\|\vec{F}^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))} + k_1\|\vec{F}_t^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))}\Big]^2 + c_4 \max_{0\le s\le N_2}|k'(s)| \times$$

$$\|Au_0\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}\Big[\nu_1 T \max_{0\le\tau\le t}\|\omega_\tau^\varepsilon\|^2 + \nu_1^{-1}\int_0^t \|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2 d\tau\Big] + \tag{34}$$

$$\max_{0\le s\le N_1}|k'(s)| \;\; \|\omega_2^\varepsilon + \omega_3^\varepsilon\|_{C^0([0,T])}\Big[T^2\|Au_0\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} +$$

$$\max_{0\le\tau\le t}\|\omega_\tau^\varepsilon\|^2\Big], \quad t\in[0,T]$$

с любыми постоянными $\nu_i > 0$, $i = 1,2,3$, где использованы обозначения: $N_1 = \max\limits_{0\le t\le T} N^2(t) + 1$, $N_2 = \max(N_1, K_2)$. Ввиду (29), (30), при некотором фиксированном $\nu_1$ и $\forall\varepsilon$ выполняется неравенство

$$1 - \nu_1\Big(1 + Tc_4 \max_{0\le s\le N_2}|k'(s)| \;\; \|Au_0\|_{C^0([0,T];L^2\Omega))}\Big) -$$

$$\|\omega_2^\varepsilon + \omega_3^\varepsilon\|_{C^0([0,T])}\max_{0\le s\le N_1}|k'(s)| \ge \frac{1}{2}. \tag{35}$$

При справедливости (35) из (34) вытекает

$$\frac{1}{2}\max_{0\le\tau\le t}\|\omega_\tau^\varepsilon\|^2 \le \|\varphi_1^\varepsilon\|^2 + k_1\|\nabla u_0^\varepsilon\|^2 + \nu_1^{-1}\|F^\varepsilon\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))} +$$

$$\nu_2\|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,t)\|^2 + \nu_2^{-1}k_1^2\|\vec{F}^\varepsilon\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} + 2k_1\|\vec{F}^\varepsilon(\cdot,0)\| \;\; \|\nabla u_0^\varepsilon\| +$$

$$\nu_3 \max_{0\le\tau\le t}\|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2 + \nu_3^{-1}\Big[c_6\|\vec{F}^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))} + k_1\|\vec{F}_t^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))}\Big]^2 +$$

$$c_7\int_0^t \|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2 d\tau + \omega(\varepsilon), \quad t\in[0,T], \tag{36}$$

где обозначено

$$c_7 = c_6 + \nu_1^{-1} c_4 \max_{0\le s\le N_2} |k'(s)| \ \ \|Au_0\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))},$$

$$\omega(\varepsilon) = \|\omega_2^\varepsilon + \omega_3^\varepsilon\|_{C^0([0,T])} T^2 \max_{0\le s\le N_1} |k'(s)| \ \ \|Au_0\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega))}.$$

Теперь из (9), (34) и (36), положив сперва $\nu_2 = k_0/4$, затем $\nu_3 = k_0/8$, выводим

$$\frac{k_0}{4} \max_{0\le\tau\le t} \|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2 \le 2\Bigg\{ \|\varphi_1^\varepsilon\|2 + k_1\|\nabla u_0^\varepsilon\|^2 + \nu_1^{-1}\|F^\varepsilon\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))} +$$

$$\frac{4k_1^2}{k_0}\|\vec{F}^\varepsilon\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} + 2k_1\|\vec{F}^\varepsilon(\cdot,0)\| \ \ \|\nabla u_0^\varepsilon\| +$$

$$\frac{8}{k_0}\left[c_6\|\vec{F}^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))} + k_1\|\vec{F}_t^\varepsilon\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega^\varepsilon))}\right]^2 +$$

$$c_7\int_0^t \|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2 d\tau + \omega(\varepsilon)\Bigg\} \equiv 2\{\ldots\},$$

$$\frac{k_0}{2}\|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,t)\|^2 \le 2\{\ldots\} + \frac{k_0}{4}\max_{0\le\tau\le t}\|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2 \le 4\{\ldots\} =$$

$$4S^\varepsilon + 4c_7\int_0^t \|\nabla\omega^\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2 d\tau, \quad t\in[0,T].$$

Следовательно, справедливы неравенства

$$\|\nabla\omega^\varepsilon\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} \le e^{8Tk_0^{-1}c_7}\frac{8}{k_0}S^\varepsilon,$$

$$\|\omega_t^\varepsilon\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} \le 2S^\varepsilon + 2(\frac{3}{8}k_0 + c_7T)\|\nabla\omega^\varepsilon\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} \le$$

$$2\Big[1 + (3 + 8Tk_0^{-1}c_7)e^{8Tk_0^{-1}c_7}\Big]S^\varepsilon \quad \forall\varepsilon. \tag{37}$$

Из сходимостей (17), (22),(26), (29), (30) следует существование предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0} S^\varepsilon = 0. \tag{38}$$

Таким образом, ввиду (28)–(31) имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|N_\varepsilon^2 - N^2\|_{C^0([0,T])} = 0.$$

Далее, имеем

$$u^\varepsilon = u_0 + \varepsilon\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \partial_k u_0 + \omega^\varepsilon, \quad (x,t)\in Q^\varepsilon,$$

$$\|\omega^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} \le T\|\omega_t^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))}; \tag{39}$$

$$\nabla u^\varepsilon = \nabla u_0 + (\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon \partial_k u_0 + \varepsilon\nabla\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \partial_k u_0 + \varepsilon\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon \nabla\partial_k u_0 -$$

$$(1-\varphi^\varepsilon)(\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon\partial_k u_0 + \nabla\omega^\varepsilon = \nabla u_0 + (\widehat{\nabla N_k})^\varepsilon\partial_k u_0 + \vec{r}^{\,\varepsilon}, (x,t)\in Q^\varepsilon,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\vec{r}^{\,\varepsilon}\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} = 0. \tag{40}$$

Из (37)-(39) вытекает существование предела

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|u^\varepsilon - u_0\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} = 0.$$

Кроме того, на основании (2), (37), (38) заключаем, что

$$\|u_t^\varepsilon - u_0'\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} = \|\varepsilon\varphi^\varepsilon N_k^\varepsilon\partial_k u_0' + \omega_t^\varepsilon\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega^\varepsilon))} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0.$$

Из (40) следует равенство

$$\Big(\widehat{\partial_i u^\varepsilon}(\cdot,t),\varphi\Big)_\Omega = \Big(\chi^\varepsilon\partial_i u_0(\cdot,t),\varphi\Big)_\Omega + \Big((\widehat{\partial_{y^i} N_k})^\varepsilon,\varphi\partial_k\bar{u}_0(\cdot,t)\Big)_\Omega +$$

$$(\widehat{r_i^\varepsilon}(\cdot,t),\varphi)_\Omega,\quad t\in[0,T],\quad \forall\varphi(x)\in L^2(\Omega),\quad i=\overline{1,n},\quad (u,v)_\Omega=\int\limits_\Omega u\bar{v}dx.$$

В нем правая часть — ввиду сходимости (40), леммы и равенств (14) — при $\varepsilon\to 0$ сходится к выражению

$$\Big(1-|\Theta|\Big)\Big(\partial_i u_0(\cdot,t),\varphi\Big)_\Omega + \int\limits_{Y\setminus\Theta}\frac{\partial N_k}{\partial y_i}dy\Big(\partial_k u_0(\cdot,t),\varphi\Big)_\Omega =$$

$$\Big(1-|\Theta|\Big)\Big(\partial_i u_0(\cdot,t)-\alpha_{ik}\partial_k u_0(\cdot,t),\varphi\Big)_\Omega$$

равномерно относительно $t\in[0,T]$.

Таким образом, обоснованы все сходимости (18). Теорема доказана.

## Список литературы


[1] Похожаев С.И. *Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений* / / Матем.сб. — 1975,т. 96 (138), N1, 152–166.

[2] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* — М.: Мир, 1971. — 372 с.

[3] Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. *Математичеескиe задачи теории сильно неоднородных упругих сред.* — М.: Изд–во МГУ, 1990. — 311 с.

[4] Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов.* — М.: Наука, 1984. — 352 с.



Институт математики НАН Украины
01601, Киев 4, ул. Терещенкивска, 3.
*E-mail address*: sidenko@imath.kiev.ua